Adı Soyadı: 07.11.2022

Numara: CEVAP ANAHTARI

MAT 101 ANALİZ I DERSİ KISA SINAV SORULARI

1) $A, B \subset \mathbb{R}$ boştan farklı üstten sınırlı iki küme olsun.

$$A+B=\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

kümesinin üstten sınırlı olduğunu ve

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$$

olduğunu gösteriniz.

2) $a \geq -1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(1+a)^n \geq 1+an$$

Bernoulli eşitsizliğini doğrulayınız.

3) a) $M=\{x \in \mathbb{R} \mid [\![x]\!]+[\![2x]\!]=4\}$ kümesi için varsa $\sup M$, $\inf M$, $\text{maks}\, M$ ve $\min M$ sayılarını bulunuz.

b) Her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için $a+c=b+c$ ise $a=b$ olduğunu gösteriniz.

Not: İlk iki soru 30, 3. soru 40 puandır ve süre 45 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

1) A ve B boştan farklı üstten sınırlı olduğundan $\sup A = c$ ve $\sup B = d$ sayıları vardır. Bu $\sup A$ ve $\sup B$ sayıları sırasıyla A ve B kümelerinin üst sınırlarıdır. O halde $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için

$a \leq c \quad \dots (1)$

ve

$b \leq d \quad \dots (2)$

yazılır. (1) ve (2) den $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $a+b \leq c+d$ bulunur. Böylece $c+d = \sup A + \sup B$, $A+B$ kümesinin bir üst sınırıdır. Yani $A+B$ üstten sınırlıdır. Şimdi supremumun karakteristik özelliğini kullanalım. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. O halde

$c - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varepsilon \quad \dots (3)$

ve

$d - \frac{\varepsilon}{2} < b_\varepsilon \quad \dots (4)$

olacak şekilde $a_\varepsilon \in A$, $b_\varepsilon \in B$ sayıları vardır. Böylece (3) ve (4) den aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için $c+d-\varepsilon < a_\varepsilon + b_\varepsilon$ yazılır. $A+B$ kümesinin tanımından $a_\varepsilon + b_\varepsilon \in A+B$ olur. Bu takdirde supremumun karakteristik özelliği gereği $\sup(A+B) = c+d = \sup A + \sup B$ elde edilir.

2) $a \geq -1$ olsun.

$n=1$ için $(1+a) \geq 1+a$ olup eşitsizlik doğrudur.

n için eşitsizlik doğru olsun. Yani

$(1+a)^n \geq 1+na \quad \ldots (1)$

olsun. $n+1$ için eşitsizliğin doğru olduğunu yani

$(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a$

olduğunu gösterelim. (1) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n (1+a) \\
&\geq (1+na)(1+a) \\
&= 1+a+na+na^2 \qquad (a \geq -1 \Rightarrow a^2 \geq 0 \Rightarrow na^2 \geq 0) \\
&\geq 1+a+na+0
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde eşitsizlik $n+1$ için sağlanır. Tümevarım prensibinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için Bernoulli eşitsizliği doğrudur.

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x = [\![x]\!] + t$, $0 \leq t < 1$ dir. Buradan

$[\![2x]\!] = [\![2([\![x]\!]+t)]\!] = 2[\![x]\!] + 2t$ olur. Böylece

$$
[\![2x]\!] = \begin{cases} 2[\![x]\!], & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 2[\![x]\!]+1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}
$$

bulunur. Buradan

i) $0 \leq t < \frac{1}{2}$ olduğunda $[\![x]\!] + [\![2x]\!] = 4 \Rightarrow [\![x]\!] + 2[\![x]\!] = 4$
$\Rightarrow [\![x]\!] = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$

olup çözüm yoktur.

ii) $\frac{1}{2} \leq t < 1$ olduğunda $[\![x]\!] + [\![2x]\!] = 4 \Rightarrow [\![x]\!] + 2[\![x]\!] + 1 = 4$
$\Rightarrow [\![x]\!] = 1$

bulunur. $x = [\![x]\!] + t = 1+t$, $\frac{1}{2} \leq t < 1$ olur. Buradan

$\frac{1}{2} \leq t < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}+1 \leq 1+t < 1+1 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2$ elde edilir. Böylece

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid [\![x]\!] + [\![2x]\!] = 4\} = [\frac{3}{2}, 2)$ dır.

$\min M = \inf M = \frac{3}{2}$ bulunur. maks M yoktur. $\sup M = 2$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in M$ için $x<2$ olduğundan 2, M nin bir üst sınırıdır. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a<2$ ve a nın M kümesinin üst sınırı olduğunu kabul edelim. O halde $\forall x \in [\frac{3}{2}, 2)$ için

$$\frac{3}{2} \leq x < a < 2 \quad \dots (1)$$

olur. $a<2 \Rightarrow 0<2-a$ olup Arşimet prensibinin sonucundan

$\frac{1}{n_0} < 2-a$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\frac{1}{n_0} < 2-a \Rightarrow a < 2 - \frac{1}{n_0}$$

olup (1) den

$$\frac{3}{2} < a < 2 - \frac{1}{n_0} < 2$$

yazılır. Buradan $2-\frac{1}{n_0} \in M$ ve $a < 2 - \frac{1}{n_0}$ bulunur. Bu durum a nın üst sınır olmasıyla çelişir. Çelişki a nın, $a<2$ olacak şekilde bir üst sınır alınmasından kaynaklanır. $\sup M = 2$ bulunur.

b) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ için $a+c=b+c$ olsun. Böylece

$a = a+0$ (toplamanın birim elemanı özelliği)

$= a+(c+(-c))$ (toplamanın ters elemanı özelliği)

$= (a+c)+(-c)$ (toplamanın birleşme özelliği)

$= (b+c)+(-c)$ ($a+c=b+c$ olmasından)

$= b+(c+(-c))$ (toplamanın birleşme özelliği)

$= b+0$ (toplamanın ters elemanı özelliği)

$= b$ (toplamanın birim elemanı özelliği)

$\Rightarrow a=b$

bulunur.